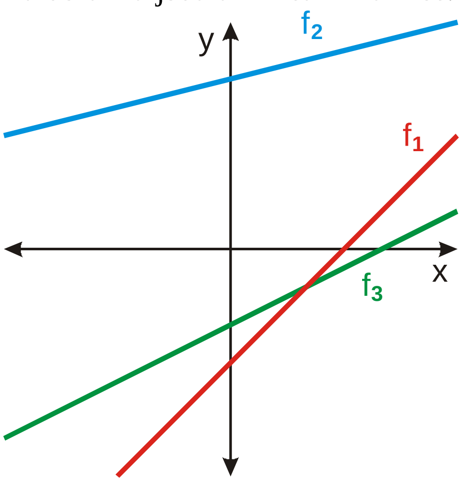
10.2.2 Derivace funkce v bodě

Předpoklady: 100201

Dávné vzpomínky

Nejjednodušší typ funkce: lineární funkce $y = ax + b$, hodnota parametru a nám říká, jak rychle funkce roste nebo klesá (jak se mění její hodnoty).

Př. 1: Na obrázku jsou tři lineární funkce. Která z nich roste nejrychleji, která nejpomaleji?

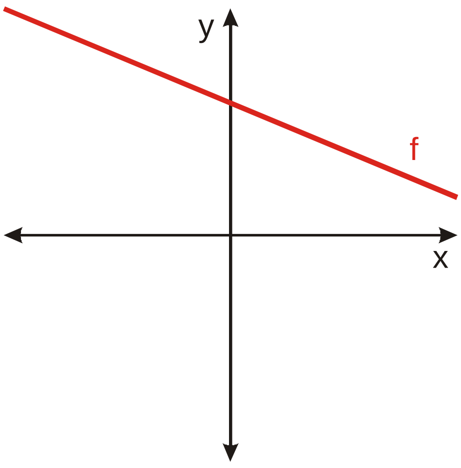


Nejrychleji roste funkce f_1 (její graf je nejstrmější), nejpomaleji funkce f_2 (její graf je nejpozvolnější).

Pedagogická poznámka: Špatná řešení vycházejí z toho, že funkce f_2 je na obrázku (úmyslně) nakreslena nejvýše. Pokud se tato chyba objeví, je třeba diskuse, které povede k tomu, že vůbec nezáleží na tom, jak vysoko je v daném místě graf funkce umístěn, ale pouze na tom, jak strmá je čára. Záměna hodnoty (výšky grafy) a změny (strmosti grafu) je velmi častým problémem při odhadování derivací.

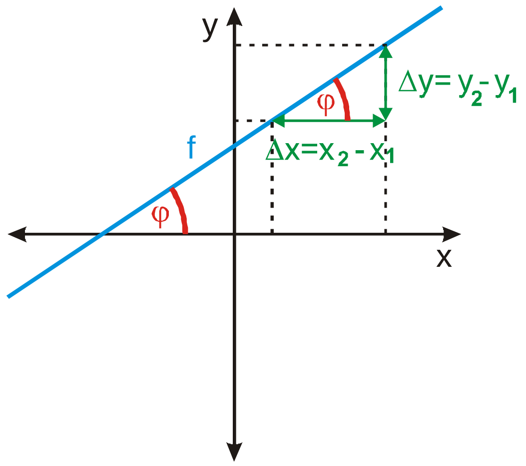
Př. 2: Načrtni graf libovolné lineární funkce, která klesá.

Graf funkce musí směřovat z levého horního rohu do pravého dolního.



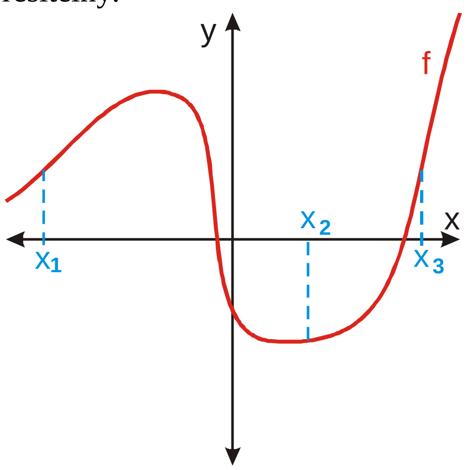
Př. 3: Kterým číslem charakterizujeme míru růstu lineární funkce. Jak se toto číslo počítá, pokud známe dva body grafu funkce?

Míru růstu lineární funkce charakterizuje hodnota parametru a, která také udává $\operatorname{tg}\varphi$ (φ je úhel, který graf svírá s kladnou poloosou x).
Hodnotu a můžeme vypočítat ze dvou bodů grafu, buď dosazením do rovnice $y = ax + b$ nebo vzorcem $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Určit, jak rychle funkce roste nebo klesá, není u lineární funkce nic těžkého. Zkusíme, zda by něco podobného šlo provést i u složitějších funkcí, které nejsou lineární (lineární funkce situaci zjednodušuje tím, že se mění pořád stejným způsobem a její změna je v každém bodě stejná).

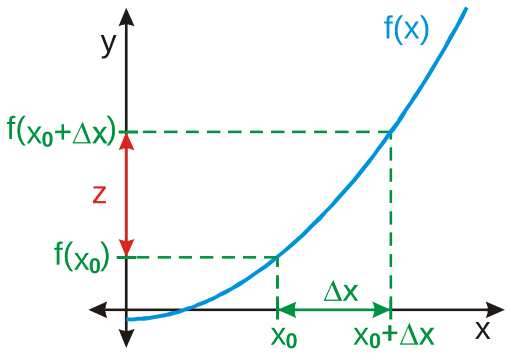
Př. 4: Na obrázku je graf funkce $y = f(x)$. Porovnej, jak rychle roste ve vyznačených bodech. Jak velkou část grafu musí být okolo každého z bodů vidět, aby byl příklad řešitelný.



Funkce $y = f(x)$ roste nejrychleji v bodě x_3 (graf je v něm nejstrmější), nejpomaleji v bodě x_2 (graf je v něm nejpozvolnější).
K vyřešení příkladu stačí vidět libovolně malou část grafu funkce v okolí bodu, ve kterém máme porovnat rychlost růstu.

Ve zbytku hodiny nebudeme rozlišovat, zda se hodnoty funkce zvětšují nebo zmenšují. Budeme zkoumat obojí dohromady jako míru růstu funkce v okolí libovolného bodu x_0.

Zkusíme vypočítat míru růstu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0. Míra růstu závisí na tom, jak se změnily hodnoty funkce $\Rightarrow$ musíme porovnávat hodnoty funkce na dvou místech $\Rightarrow$ zvolíme si vedle bodu x_0 další bod o Δx dál (tedy $\Delta x \geq 0$) a vypočteme, jak se změnila hodnota funkce: $z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$.



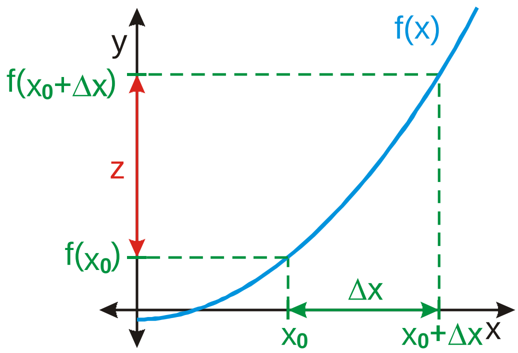
Př. 5: Jak z hodnoty čísla $z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ určíme, zda funkce roste nebo klesá?

Platí:

- $z > 0 \Rightarrow$ funkce *f* roste (protože $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, bod více vpravo je výše),
- $z < 0 \Rightarrow$ funkce *f* klesá (protože $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, bod více vpravo je níže).

Př. 6: Najdi důvody, proč číslo $z = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ není správnou charakteristikou míry růstu funkce v bodě x_0.

Velikost čísla *z* závisí na volbě Δx. Čím větší zvolíme Δx, tím větší hodnotu *z* získáme (v našem případě), míra růstu funkce v bodě x_0 je však ve všech případech stejná.



Vrátíme se k vzorci pro výpočet směrnice lineární funkce $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, kde jsme žádný problém s určením míry růstu neměli. Přepíšeme vzorec podle značení, které jsme použili při výpočtu čísla *z*:

- $x_1 = x_0$,
- $x_2 = x_0 + \Delta x$,
- $y_1 = f(x_1) = f(x_0)$,
- $y_1 = f(x_2) = f(x_0 + \Delta x)$.

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Čitatel se shoduje s naším výrazem pro míru růstu funkce (a je tedy závislý na volbě Δx), vzorec navíc obsahuje jmenovatel Δx.

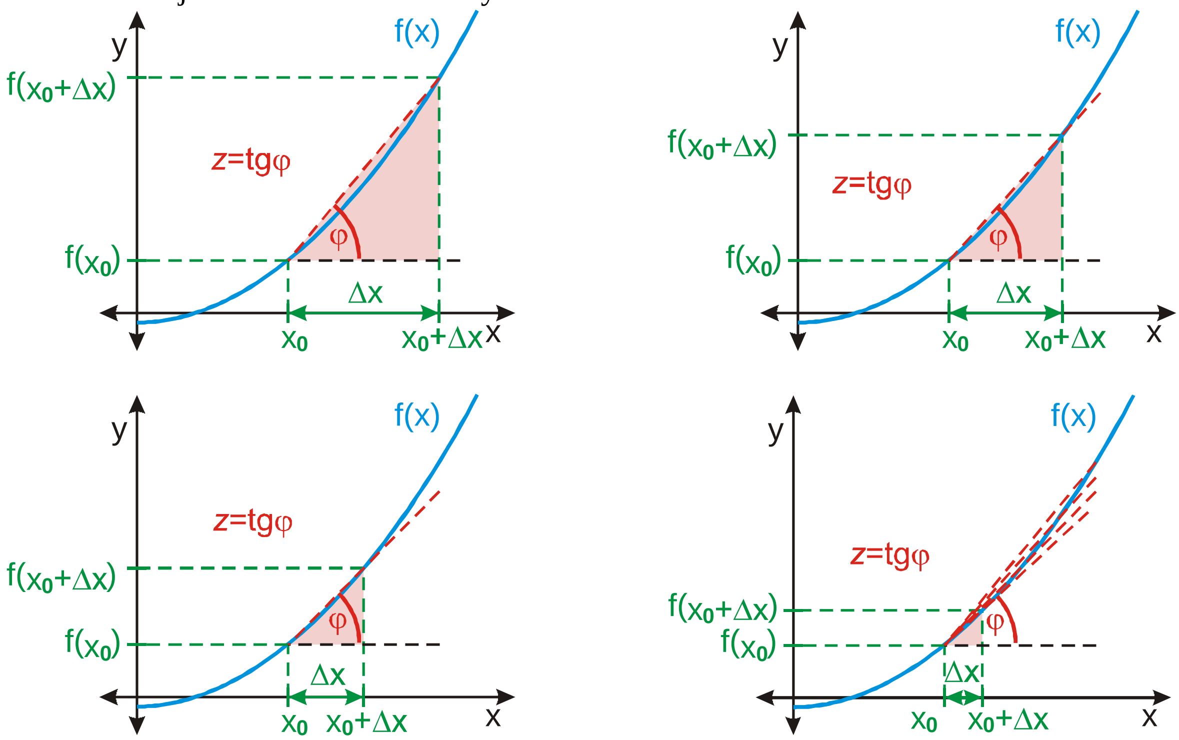
Řeší tato změna problémy se závislostí na volbě Δx?

Minimálně částečně ano: Při volbě většího Δx získáme větší $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, ale získané větší číslo dělíme větším Δx, což výsledek zase zmenší $\Rightarrow$ použijeme tento vzorec jako vylepšenou verzi vztahu pro míru růstu funkce v bodě x_0: $z = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Vyřešili jsme problémy se závislostí na volbě Δx úplně?

Př. 7: Nakresli několik obrázků naší funkce s různou zvolenou velikostí Δx. Závisí hodnota $z = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ na volbě Δx? Proč?

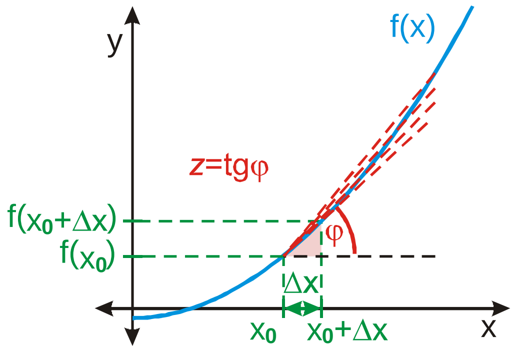
z je stejně jako parametr *a* u lineární funkce $\mathrm{tg}\varphi$, kde φ je úhel, který svírá přepona červeného trojúhelníku se směrem osy *x*.



V posledním obrázku jsou nakresleny směry všech čtyř přepon červeného trojúhelníka $\Rightarrow$ hodnota změny $z = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ závisí na volbě Δx. Sklon grafu funkce se mění a protože se změnou Δx se mění druhý bod, který využíváme ke konstrukci červeného trojúhelníku, mění se i hodnota změny *z*.

U lineární funkce tento problém nenastává, protože její graf má ve všech bodech stejným sklon.

Př. 8: Pro jakou volbu Δx získáme v předchozím příkladu přesnější výsledek?



Čím menší volíme Δx tím více směr přepony červeného trojúhelníka shoduje se směrem grafu funkce v bodě x_0.

Už chvíli víme, že nám k určení míry růstu funkce v libovolném místě stačí prozkoumat libovolně malé okolí tohoto bodu. Navíc čím menší Δx používáme, tím přesnější údaj o míře růstu získáváme $\Rightarrow$ $z = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ pro co nejmenší Δx $\Rightarrow$ nejpřesnější hodnotu získáme, když spočteme limitu: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Problém?!

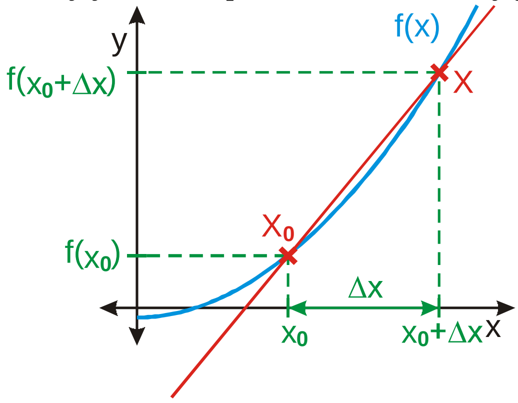
Můžeme si dovolit výraz $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ vůbec spočítat? Jak může náš pokus o výpočet dopadnout?

- Sledujeme jmenovatel: Děláme $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ $\Rightarrow$ ve jmenovateli zlomku se objeví nula a to není možné.
- Sledujeme čitatel: Děláme $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$, oba body grafu se přibližují k sobě $\Rightarrow$ čitatel $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ se blíží k nule $\Rightarrow$ u libovolné funkce v libovolném bodě vyjde vždy nula a to určitě není správně.
- Sledujeme zlomek jako celek: Děláme $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$, jak čitatel tak jmenovatel se blíží k nule $\Rightarrow$ jako jejich poměr však stále může vyjít rozumné číslo (už jsme u limit takové situace zažili, limita nepopisuje to, co se děje přesně v bodu x_0, ale to k čemu situace směřuje, když se k bodu x_0 nekonečně přibližujeme).

Zkusíme se na problém podívat z jiného úhlu.
Se změnou funkce souvisí směrnice tečny grafu (čím rychleji funkce roste, tím strmější je tečna) $\Rightarrow$ prozkoumáme tečnu grafu v bodě x_0.

Rovnice přímky procházející bodem $X_0[x_0, y_0]$: $y - y_0 = k(x - x_0)$ $\Rightarrow$ potřebujeme určit směrnici k v bodě $X_0[x_0, y_0]$. Nevíme, jak ji najít přesně $\Rightarrow$ zkusíme ji určit přibližně a pak náš odhad postupně zpřesnit.

Přímku, která je přibližně tečnou v bodě $X_0[x_0, f(x_0)]$, nahradíme přímkou, která prochází bodem $X_0[x_0, f(x_0)]$ a bodem $X[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ (není přesnou tečnou, ale dokážeme určit její rovnici, protože umíme určit její směrnici).



Směrnice přímky $k = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (získali jsme stejný zlomek, jako před okamžikem, když jsme se snažili určit míru změny funkce).

Směrnici tečný získáme tím přesněji, čím blíže bodu x_0 bude bod $x_0 + \Delta x$ $\Rightarrow$ tím přesněji, čím menší bude Δx $\Rightarrow$ stejně jako před chvíli se dostáváme k limitě
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Znamená to, že jsme opět v koncích?
Rozhodně ne. Nevíme, zda je možné vyjádřit změnu funkce v bodě zcela přesně nějakým číslem, ale víme, že graf funkce má v bodě x_0 tečnu, že tato tečna musí mít směrnici a že tato směrnice je rozumné reálné číslo $\Rightarrow$ limita $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ nevede ani k jednomu z nepěkných výsledků, ale k rozumnému reálnému číslu.

Naše úvahy dovedeme do konce na konkrétním příkladu, u kterého známe řešení. Takový příklad máme k dispozici díky fyzice.
Zlomek $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ známe z fyziky ve tvaru $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. I tady jsme si říkali, že výsledek $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ je pouze přibližným odhadem okamžité rychlosti, ke kterému se budeme blížit tím lépe, čím kratší Δt použijeme. Ideálním případem pak je limita $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$ (okamžitá rychlost vyjadřuje změnu dráhy v čase, "je záležitostí jediného konkrétního okamžiku, stejně jako změna a tečna jsou záležitostí jediného bodu v grafu").

Zabývat se budeme rovnoměrně zrychleným pohybem (pro jednoduchost s nulovou počáteční rychlostí).
Známe:

- původní funkci: závislost dráhy na čase - $y=\frac{1}{2}at^2$,
- odvozenou funkci, která popisuje změnu původní funkce v čase: závislost okamžité rychlostí na čase - $v=at$.

Tedy známe nejen zadání, ale i výsledek $\Rightarrow$ můžeme uplatnit naše předchozí úvahy a na výsledku zkontrolovat, zda jsou správné.

Dosadíme do výpočtu změny původní funkce (místo *x* používáme klasické označení času *t*):

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}a(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}a(t_0)^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}a(t_0^2+2t_0\Delta t+\Delta t^2)-\frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}at_0^2+\frac{1}{2}a2t_0\Delta t+\frac{1}{2}a\Delta t^2-\frac{1}{2}at_0^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{at_0\Delta t+\frac{1}{2}a\Delta t^2}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(at_0+\frac{a\Delta t}{2}\right)=at_0+0=at_0$$

Protože jsme nekladli žádné podmínky ohledně času t_0, ve kterém jsme změnu dráhy určovali, můžeme za t_0 dosadit libovolné *t* a ve vzorci můžeme psát $v=at$.

Odvození dopadlo přesně tak, jak jsme očekávali: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v=at$ $\Rightarrow$ dokonale přesným výpočtem změny dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu $y=\frac{1}{2}at^2$ jsme získali funkci $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v=at$, která udává pro libovolný okamžik vztah pro okamžitou rychlost tohoto pohybu $\Rightarrow$ naše úvahy byly správné, výraz $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ určuje s nekonečnou přesností míru změny (dále už budeme říkat pouze změnu) funkce (případně směrnici tečny jejího grafu) v bodě x_0.

Shrnutí:
Chceme vědět, jakým způsobem se mění hodnoty funkce $y=f(x)$ v bodě x_0:

- přibližná hodnota změny $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,
- přesnost výpočtu se bude zvětšovat, když se Δx bude zmenšovat $\Rightarrow$ nekonečně přesný výsledek: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ = **derivace funkce *f* v bodě x_0.**

Definice:
Je dána funkce *f* definovaná v jistém okolí bodu x_0. Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ nazýváme ji derivací funkce *f* v bodě x_0 a značíme ji symbolem $f'(x_0)$.

Derivováním funkce $f(x)$ získáme funkci $f'(x)$ jejíž hodnoty v každém bodě x_0 udávají:

- změnu původní funkce $f(x)$ v bodě x_0,
- směrnici tečny grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0.

Derivace je speciálním případem limity.

Derivování funkcí je matematickým nástrojem, který umožňuje zachytit jeden ze základních fyzikálních vztahů mezi veličinami (jedna veličina je úměrná změně jiné veličiny) a proto byl objev derivování jednou z podmínek velkého rozvoje fyziky na konci sedmnáctého století.

Shrnutí: Derivace funkce $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ udává změnu hodnot funkce v bodě x_0.